قابلية القسمة:

إذا كان S نصف زمرة ليست زمرة فهذا يعني أنه هناك على الأقل عنصرين $a,b \in S$ بحيث يتحقق أنه لا يوجد من أجلهما $x,y \in S$ بحيث يكون:

$$xb = a \qquad by = a$$

$$Sb = S \qquad bS = S$$

من الممكن أن تتحقق من أجل العنصرين a,b إحدى العلاقتين السابقتين لأنه قد x أو y تحقق إحدى المعادلتين

تعريف:

يسمى العنصر b من نصف الزمرة S قاسماً يمينياً للعنصر a إذا وجد عنصر $x \in S$ بحيث يكون $bx = a$

[illegible]

يسمى العنصر b من نصف الزمرة S قاسماً يسارياً للعنصر a إذا وجد عنصر $y \in S$ بحيث يكون $by = a$

ونقول في الحالة الأولى أن a تقبل القسمة على b من اليمين وفي الحالة الثانية نقول أن a تقبل القسمة على b من اليسار.

مبرهنة:

لتكن S نصف زمرة و B مجموعة القواسم اليمينية واليسارية لكل عنصر من S فإن

1) B غير خالية $\Leftrightarrow$ كانت S مونوئيد (نصف زمرة واحدية)

2) B زمرة جزئية من S إذا كانت غير خالية.

البرهان:

إن المجموعة B هي مجموعة العناصر التي تحقق

$$B = \{ b \in S \ ; \ bS = Sb = S \}$$

$\Leftarrow$ نفرض أن B مجموعة غير خالية $(B \neq \phi)$ يوجد عنصر مثل $b \in B$ وبالتالي $\forall a \in S$ يوجد $x, y \in S$ بحيث أن $bx = a \wedge yb = a$

ولكن $b \in S$ وبالتالي يوجد عنصرين $e, e' \in S$ بحيث يكون :

$be = b$, $e'b = b$

[illegible] :

e محايد يميني $ae = ybe = yb = a$ ⇐

e' محايد يساري $e'a = e'bx = bx = a$ ⇐

⇐ $e' = e'e = e$

أي أنه $a \in S$ فإنه يوجد $e \in S$ بحيث يكون

e محايد في S ⇐ $ae = ea = a$

S زمرة ⇐

كفاية الشرط :

نفرض أن S زمرة ⇐ S تحتوي عنصر محايد e ولكن .

$eS = Se = S \Rightarrow e \in S \Rightarrow B \neq \phi$

نثبت أن B غير خالية ⇐ B زمرة جزئية من S

. إذا كانت B غير خالية ولتكن $b_1, b_2 \in B$ فإن

$$\left.\begin{array}{l} b_1 b_2 S = b_1(b_2 S) = b_1 S = S \\ S b_1 b_2 = (S b_1) b_2 = S b_2 = S \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 b_2 S = S b_1 b_2 = S$$

⇐ $b_1 b_2 \in B$ أي أن B مغلقة زمرة جزئية من S

. بما أن $B \neq \phi$ ⇐ أنه يوجد عنصر محايد $e \in S$ بحيث $eS = Se = S$

⇐ $e \in B$

. بما أن $e \in S$ محايد لكل $b \in B$ يوجد $b', b'' \in S$ بحيث يكون

$e = bb'$ $e = b''b$

$b' = eb' = b''bb' = b''e = b''$

أي أنه لكل $b \in B$ يوجد $b' \in S$ بحيث يكون

$bb' = b'b = e$

بقي علينا أن نثبت أن $b' \in B$

$s = es = b'bs = b's$;
$s = se = sbb' = sb'$ } $\Rightarrow b's = sb' = s \Rightarrow b' \in B$

أي أن لكل عنصر نظير في B

وبالتالي فإن B زمرة أي هي زمرة جزئية من S

مبرهنة

في نصف زمرة S مجموعة كل العناصر التي تقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على كل عنصر من عناصر S هي إما خالية أو زمرة جزئية من S

البرهان

لتكن C مجموعة كل العناصر في S التي تقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على كل عنصر من عناصر S

إذا لم تكن C خالية لنفرض أن $c_1, c_2 \in C$ عنصرين فيها، ليكن $a \in S$ يوجد عنصر $x \in S$ بحيث يكون $c_1 = ax$ أي

$$c_1 c_2 = (ax) c_2 = a(x c_2)$$

وبالتالي فإن $c_1 c_2$ يقبل القسمة على a من اليسار

سوف نستخدم الملاحظة $ca = ac = c$ لإثبات أن C زمرة

بنفس الطريقة نبرهن أنه من أجل $a \in S$ فإنه يوجد $y \in S$ بحيث يكون $c_2 = ya$

أي $c_1 c_2 = c_1(ya) = (c_1 y) a$

أي أن $c_1 c_2$ يقبل القسمة على a من اليمين ومنه $c_1 c_2 \in C$ وبالتالي فإن C هي نصف زمرة جزئية من S

لنثبت أن $ac = ca = c \quad ; \quad \forall a \in C$ حتى تكون زمرة جزئية من S

عندئذ

$c_1, c_2 \in S$ و $c_2, c_2^2 \in S$ فإنه يوجد $w, v, u \in S$ بحيث يكون

$c_2 w = c_1 \qquad c_2^2 v = c_2 \qquad u c_2^2 = c_2$

(c_1 تقبل القسمة على c_2 من اليسار) (c_2 تقبل القسمة على c_2^2 من اليسار) (c_2 تقبل القسمة على c_2^2 من اليمين)

ومنه
$$uc_2 = u(c_2^2 v) = (uc_2^2) = c_2 v$$

وبالتالي فإن

$$c_2(c_2 v^2 c_1) = (c_2^2 v)(v c_1) = c_2(v c_1) = (c_2 v) c_1$$
$$= (u c_2) c_1 = (u c_2)(c_2 w) = (u c_2^2) w$$
$$= c_2 w = c_1$$

أي أن العنصر $y = c_2 v^2 c_1$ هو حل للمعادلة $c_2 y = c_1$

لنثبت أن $y \in C$ لدينا $\forall a \in S$ فإنه يوجد $s_1, s_2 \in S$ بحيث يكون

$$c_1 = s_1 a \qquad c_2 = a s_2$$

$$y = c_2 v^2 c_1 = a s_2 v^2 s_1 a = a(s_2 v^2 s_1 a) = (a s_2 v^2 s_1) a$$

$\Leftarrow$ y تقبل القسمة على a من اليمين ومن اليسار $\Leftarrow$ $y \in C$

بطريقة مشابهة إذا كانت $c_1, c_2 \in C$ فإن $c_2, c_2^2 \in S$ وبالتالي فإنه يوجد $u, v, w \in S$ بحيث يكون

$$c_2^2 u = c_2 \qquad v c_2^2 = c_2 \qquad w c_2 = c_1$$

ومنه

$$v c_2 = v(c_2^2 u) = (v c_2^2) u = c_2 u$$

وبالتالي فإن

$$(c_1 v^2 c_2) c_2 = (c_1 v)(v c_2^2) = (c_1 v) c_2 = c_1(c_2 u) = (w c_2)(c_2 u)$$
$$= w(c_2 u) = w c_2 = c_1$$

أي أن العنصر $x = c_1 v^2 c_2$ هو حل للمعادلة $x c_2 = c_1$

لنثبت أن $x \in C$ لدينا $\forall a \in S$ فإنه يوجد $s_1, s_2 \in S$ بحيث يكون

$$c_2 = s_2 a \qquad c_1 = a s_1$$

$$x = c_1 v^2 c_2 = a s_1 v^2 s_2 a = a(s_1 v^2 s_2 a) = (a s_1 v^2 s_2) a$$

ومنه فإن x تقبل القسمة على a من اليسار ومن اليمين $\Leftarrow$ $x \in C$ وبالتالي

$$\forall c \in C ;\ cC = Cc = C$$

أي أن C زمرة